Σειρές Μιγαδικών Αριθμών:

1) Να εξετασθούν οι σειρές ως προς τη σύγκλιση:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^n}{n(n+1)}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(2+3i)^n$ iv) $\sum_{n=1}^{\infty}(2-i)^n$

ΛΥΣΗ

i) Έστω $z_n=\left(\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \rightsquigarrow |z_n|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{3}{9}}^{\,n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

όπου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ είναι γεωμετρική σειρά η οποία συγκλίνει στον αριθμό:

$\frac{2/3}{1-2/3}=2$ Έτσι, $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|<\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}z_n<\infty$

ii) Έστω $z_n=\frac{(i/2)^n}{n(n+1)} \rightsquigarrow |z_n|=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n(n+1)}<\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}$

Άρα, εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|<\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}z_n<\infty$

iii) Εφαρμόζουμε το Κρ. D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}(2+3i)^{n+1}}{\frac{n!}{3^n}(2+3i)^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\cancel{n!}(n+1)}{\cancel{3^n}3}\cdot\cancel{(2+3i)^n}\cdot(2+3i)}{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{3^n}}\cancel{(2+3i)^n}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}|2+3i|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{13}(n+1)}{3}=\infty$$

Άρα, $\sum_{n=1}^{\infty}z_n=+\infty$

iv) Εαν $z_n = (2-i)^n$ παίρνουμε το Κρ. n-οστής ρίζας του Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2-i|^n} = \lim_{n\to\infty} |2-i| = \sqrt{5} > 1$$

άρα, η $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = +\infty$

2) Να βρεθεί ο τόπος σύγκλισης των εξής σειράς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2z-i}{2}\right)^n \cdot n^{-3}$$

ΛΥΣΗ

Εστω $z_n = \frac{(2z-i)^n}{2^n} \cdot \frac{1}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad z \neq \frac{i}{2}$

Κρ. D'Alembert:

$$\left| \frac{\frac{(2z-i)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{(2z-i)^n}{2^n} \cdot \frac{1}{n^3}} \right| = \left| \frac{\frac{\cancel{(2z-i)^n} \cdot (2z-i)}{\cancel{2^n} \cdot 2} \cdot \frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{\cancel{(2z-i)^n}}{\cancel{2^n}} \cdot \frac{1}{n^3}} \right| = \frac{n^3}{2(n+1)^3} |2z-i|$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} |2z-i|.$$

- $|2z-i| < 1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{n} z_n < \infty$
- $|2z-i| > 1 \rightsquigarrow \sum z_n = \infty$
- $|2z-i| = 1 \rightsquigarrow |z_n| = \frac{|2z-i|^n}{2^n} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2^n \cdot n^3} < \frac{1}{n^3}$

  όπου $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n < \infty$

- $z = \frac{i}{2}$ προφανώς $\sum z_n = 0$

Άρα, η σειρά συγκλίνει όταν $|2z-i| \leq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2|z-\frac{i}{2}| \leq 1 \rightsquigarrow |z-\frac{i}{2}| \leq \frac{1}{2}$. Τόπος σύγκλισης σειράς κύκλος με κέντρο το $\frac{i}{2}$ και ακτίνα $1/2$.

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ

Ασκηση 1

Εαν $|z|<1$ νδο $\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{z+1}$

ΛΥΣΗ

Εστω $f_n(z)=(-z)^n$, $n\in\mathbb{N}$

$f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)+\dots+f_n(z)=1-z+z^2-z^3+\dots+(-z)^n$

Ετσι, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \overset{\gamma.\pi}{=} \frac{1\cdot((-z)^{n+1}-1)}{-z-1} = \frac{(-z)^n\cdot z+1}{z+1}$

Οπου, $\lim_{n\to\infty} \frac{(-z)^n\cdot z+1}{z+1} = \frac{0\cdot z+1}{z+1} = \frac{1}{z+1}$

(διοτί $\lim_{n\to\infty}(-z)^n=0$ αφού $|z|=|-z|<1$)

Αρα, $\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \frac{1}{z+1}$, $\forall z\in\mathbb{C}$ με $|z|<1$

Θυμίζουμε οτι:

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει για κάθε μιγαδικό αριθμό z με $|z-z_0|<R$ και αποκλίνει για κάθε μιγαδικό z με $|z-z_0|>R$ με R: ακτίνα σύγκλισης οπου την ορίζουμε ως εξής:

$$R=\begin{cases} 0, & a=+\infty \\ \frac{1}{a}, & a>0 \\ +\infty, & a=0 \end{cases}, \quad \text{με } R:=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{ή} \quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

- $R=0$, αν η σειρά συγκλίνει μόνο στο $z=z_0$
- $R=+\infty$, αν η " " προς κάθε μιγαδικό z

Να πούμε οτι ο ανοιχτός κυκλικός δίσκος $|z-z_0|<R$ λέγεται δίσκος σύγκλισης της σειράς ενώ για τα σημεία $|z-z_0|=R$ δεν υπάρχει συμπερασμα τι "κάνει" η σειρά

Ασκηση 2

Ποια η ακτίνα και ο δίσκος σύγκλισης των ακόλουθων σειρών;

α) $\sum_{n=0}^{\infty} n!(z-i)^n$, β) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i\sqrt{3})^n \cdot (z-z_0)^n$, γ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^n\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n}$

ΛΥΣΗ

α) Εστω $a_n = n! \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$

Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της σειράς είναι $R=0$ άρα η σειρά συγκλίνει μόνο στο $z=i$

β) Εστω $b_n = (1+i\sqrt{3})^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1+i\sqrt{3}|^n} = \lim_{n\to\infty}|1+i\sqrt{3}| = 2$

οπου $2 \in (0,\infty)$

Αρα, η ακτίνα σύγκλισης της σειράς είναι $R=\frac{1}{2}$ και άρα ο δίσκος σύγκλισης είναι $|z-z_0|<\frac{1}{2}$

γ) Εστω $\gamma_n = \frac{1}{n^n\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 0$

Αρα, η ακτίνα σύγκλισης της σειράς είναι $R=\infty$ Συνεπώς αυτή θα συγκλίνει σε κάθε $z\in\mathbb{C}$

Παράδειγμα #1:

Νδο $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2\sqrt{n+3}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο

δίσκο $|z| \leq 1$.

ΛΥΣΗ

Θυμίζουμε το M-θεώρημα Weierstrass.:

- Στον τόπο D ισχύει $|f_n(z)| \leq a_n$ και $\sum a_n < \infty$ τότε $\sum f_n(z) < \infty$ ομοιόμορφα.

$$|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n^2\sqrt{n+3}} \leq \frac{1}{n^2\sqrt{n+3}} < \frac{1}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{5/2}}$$

όπου

$$\sum \frac{1}{n^{5/2}} < \infty \Rightarrow \sum |f_n(z)| < \infty \Rightarrow \sum f_n(z) < \infty$$

Παράδειγμα #2:

Ποιος ο τόπος ομοιόμορφης σύγκλισης της εξής σειράς;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+2^n}.$$

ΛΥΣΗ

Αν $a_n = \frac{1}{1+2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1+2^n}{1+2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1+1/2^n}{2+1/2^n}\right| = \frac{1}{2}$$

άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=2$ και δίσκο σύγκλισης τον $|z|<2$.

Από θεωρία⊛ η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα σε κάθε δίσκο $|z| \leq \rho$ με $\rho < 2$ (δηλ. σε κάθε τόπο εσωτερικά του δίσκου σύγκλισης της δυναμοσειράς)

⊛ Θεωρία: σελ. 131 από το βιβλίο του Καραμπετάκη

Εργασία / Άσκηση:

Νδο η δυναμοσειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n^2} , z_0 = \sigma\tau\alpha\theta$$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα

στον κυκλικό δίσκο $|z-z_0| \leq 1$